# 坐标系统与时间系统

## 坐标系统及其相互转换

### 大地坐标系

### 空间直角坐标系

### ITRF、关于原点（包括海洋、大气在内整个地球中心CM，固体地球中心CE，几何中心CF）

### 站心坐标系

### 大地坐标系与空间直角坐标系的相互转换





式中：和分别为对应点的空间直角坐标和大地坐标，卯酉圈曲率半径，、分别为大地坐标系对应椭球的长半轴和第一偏心率。

### 大地坐标系转换至站心地平直角坐标系

如图所示，以椭球中心*O*为原点建立空间直角坐标系*O*-*XYZ*，以测站*P*为原点建立站心地平直角坐标系*P*-*NEU*和站心赤道直角坐标系*P*-*xyz*，*P*-*xyz*与*O*-*XYZ*存在平移关系



由站心地平直角坐标系*P*-*NEU*到站心赤道直角坐标系*P*-*xyz*的转换过程为：先将*P*-*NEU*绕*E*轴顺时针旋转角度(90°-*B*)，再绕*U*轴顺时针旋转角度(180°-*L*)，最后将*E*轴反向得到右手坐标系。转换公式为



式中：

，

，。

根据以上两式得大地坐标系至站心地平直角坐标系的转换公式



*B*

*H*

*y*

*O*

*N*

*Y*

*X*

*E*

*U*

*Z*

*x*

*z*

*L*

*P*

图1-1 站心地平与站心赤道直角坐标系

## 时间系统

# 精密单点定位的数学模型

参数估计问题完整的数学模型应该包括函数模型和随机模型，前者描述了观测量与未知参数之间确定的关系，后者描述观测量之间或未知参数之间的统计（不确定）信息。观测量的随机模型描述了观测量的精度和可能存在的相关性，未知参数的随机模型则表示参数先验信息及其随时间变化的情况。

## 函数模型

### 基于原始观测值的非差非组合模型



式中：

*s*为卫星号，*i*（*i*=1,2）代表信号频率；

、分别为经过后的伪距和载波相位观测值；

为卫星至接收机的几何距离，*c*为光速；

、分别为接收机钟差和卫星钟差；

、为分别为电离层延迟和对流层延迟；

为载波相位观测值的波长，为整周模糊度；

、分别为接收机端和卫星端伪距硬件延迟；

、分别为接收机端和卫星端相位未校准硬件延迟（Uncalibrated Phase Delay，UPD）；

、分别为伪距和载波相位观测值的多路径误差；

和分别为伪距和载波相位观测值的测量噪声；

为固体潮、海潮负荷、地球自转、天线相位中心偏差、相对论效应等各项改正。

### 无电离层组合模型



式中：

## 随机模型

### 观测值随机模型

1. 基于高度角的随机模型

将观测值的测量噪声表达成卫星高度角*E*的函数



对于不同的基于卫星高度角的随机模型，高度角函数*f*具有不同的形式，其中应用最广泛的高度角随机模型是指数函数模型和正余弦函数模型。

1. Bernese采用的余弦函数模型



1. GAMIT采用的正弦函数模型



1. PANDA采用的定权策略



1. 其他常用的高度角定权模型



设某一历元观测到*n*颗卫星，非差精密单点定位中对各卫星的观测值之间相互独立，该历元的观测值协方差阵为



式中：、、分别为伪距和载波相位观测值的方差以及二者的协方差。

对于无电离层组合模型，伪距与载波相位观测值之间不存在数学相关性，，观测值协方差阵为对角阵。

1. 基于信噪比的随机模型

### 参数随机模型

1. 对流层延迟随机模型

对流层天顶延迟的湿分量可以用一阶高斯-马尔可夫过程描述，连续时间的一阶高斯-马尔可夫过程可表示为微分方程





式中：为随机过程的相关时间，是方差为的零均值高斯白噪声，为Dirac函数。

离散的一阶高斯-马尔可夫过程为



式中：。

当时，，一阶高斯-马尔可夫过程退化为随机游走过程



当时，，一阶高斯-马尔可夫过程退化为白噪声过程



1. 钟差随机模型



（另见动态定位中的卡尔曼滤波P23钟差的二阶高斯马尔可夫过程）

# 精密单点定位的误差源及其改正

## 误差分类

1. 按误差来源划分

表3‑1 GPS测量误差的分类及其对距离测量的影响

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **误差来源** | **误差名称** | **测距影响**  **量级**/m | **是否与频率**  **有关** | **是否与观测值**  **类型有关** |
| 卫星端 | 星历误差 | 1.5~15 |  |  |
| 卫星钟差 |  |  |  |
| 卫星端硬件延迟 |  |  |  |
| 卫星天线  相位中心偏差 |  |  |  |
| 相对论效应 |  |  |  |
| 信号  传播 | 电离层延迟 | 1.5~15 |  |  |
| 对流层延迟 |  |  |  |
| 多路径效应 |  |  |  |
| 接收  机端 | 接收机位置误差 | 1.5~5 |  |  |
| 接收机钟差 |  |  |  |
| 接收机端硬件延迟 |  |  |  |
| 接收机天线  相位中心偏差 |  |  |  |
| 地球潮汐 |  |  |  |
| 测量噪声 |  |  |  |

1. 按误差性质划分
   1. 系统误差（GPS测量的主要误差源）：星历误差、卫星钟差、接收机钟差、大气折射误差等。主要处理措施如下：
   2. 偶然误差：多路径效应、接收机测量噪声（是偶然误差吗？）、观测误差。

难以建立改正模型，也不能采用求差法来抵消，通过选择较好的硬件和较好的观测条件进行削弱。

## 卫星钟差

### 卫星钟差模型

卫星在时刻*t*的钟差可表示为



式中：为时刻的卫星钟差，为时刻卫星钟的钟速（频偏），为时刻卫星钟加速度的一半（称为钟的老化率或频漂）。

### 顾及硬件延迟的卫星钟差改正

若卫星在卫星钟钟面时刻生成的测距信号经过硬件延迟后在GPS标准时间离开卫星发射天线相位中心，则该卫星钟的钟差为



吸收了硬件延迟的卫星钟差为



GPS在导航电文中播发给用户的卫星钟差参数即为吸收了硬件延迟的卫星钟差，并且是基于L1P码和L2P码所组成的无电离层组合观测值来测定和预报的。



式中：、分别为L1P码和L2P码的伪距观测值，、分别为L1、L2载波的频率。

令，则无电离层组合观测值的硬件延迟



进而可得



1. 单独使用L1P码的修正方法

单独使用L1P码的卫星钟差



它与播发的卫星钟差之差



式中：称为群延迟，该参数由GPS系统测定，并在卫星导航电文中给出。

根据给出的卫星钟差及群延迟参数TGD可求得L1P码的卫星钟差参数



1. 单独使用L2P码的修正方法

单独使用L2P码的卫星钟差与播发的卫星钟差之差



因此L2P码的卫星钟差参数



1. 使用C/A码、L2C码、L5I码、L5Q码测距的用户的修正方法

上述各种测距信号与P1测距信号在卫星内部的硬件延迟之差可精确加以测定，称为ISC参数



顾及，从而有



## 电离层延迟

电离层是指地球上空距地面高度在60~1000km的大气层。当GPS信号通过电离层时，其传播速度会发生变化，变化程度主要取决于电离层中的电子密度和信号频率；另外，信号传播路径会略微弯曲，弯曲程度与信号频率有关，但对测距结果影响不大，一般情况下可不予考虑。以上两种变化使得信号传播时间乘以真空中的光速不等于卫星至接收机的几何距离，这种误差称为电离层延迟。电离层延迟与卫星高度角有关，在天顶方向可达十几米，在高度角为5°时可超过50m。

### 电子密度*Ne*与总电子含量TEC

1. 电子密度*Ne*

单位体积中所含的电子数称为电子密度，常用电子数/m3或电子数/cm3表示。电子密度*Ne*与高程*H*和地方时*t*有关，即。电子密度*Ne*与高程*H*的关系为：

* 1. 随着高程*H*的增加，大气将变得越来越稀薄，单位体积所含的可供电离的气体分子数越来越少，从而产生一种趋势：电子密度*Ne*随高程的增加而减小。
  2. 太阳光在穿越电离层过程中，其能量将不断地被大气层吸收而越来越弱，最终将不足以使气体分子电离，从而产生另一种趋势：电子密度*Ne*随高程的增加而增大。

在以上两种相反因素作用下，电子密度一般在高度为300~400km取得最大值。

1. 总电子含量TEC (Total Electron Content)

总电子含量TEC是电子密度*Ne*在卫星信号传播路径*s*上的曲线积分，即底面积为一个单位面积、沿信号传播路径贯穿整个电离层的一个柱体中所含的电子数，通常以电子数/m2或电子数/cm2表示。总电子含量与地方时*t*和卫星高度角*E*有关。



1. 天顶方向总电子含量VTEC (Vertical Total Electron Content)

对同一电离层而言，从某一测站至各卫星方向上的TEC值是不同的。卫星高度角*E*越小，信号在电离层中的传播路径就越长，TEC值就越大。在该站所有的TEC值中有一个最小值，即天顶方向总电子含量VTEC。VTEC与高程和卫星高度角均脱离了关系，可以反映测站上空电离层的总体特征。

1. VTEC与太阳活动程度的关系
2. 影响VTEC的其他因素

### 电离层延迟及其双频改正模型

1. 电离层延迟量的推导

群速度：不同频率的一组电磁波信号作为一个整体在电离层中的传播速度。在利用测距码进行距离测量时，测距码以群速度**在电离层中传播。

相速度：单一频率的电磁波的相位传播速度，并非物质传播速度。在载波相位测量中，载波的相位以相速度在电离层中传播。

设电磁波在真空中的传播速度为*c*，信号频率为*f*，电子密度为*Ne*，在仅顾及项的情况下，电离层中的群折射率和相折射率以及卫星信号的群速度**和相速度分别为



若信号传播时间为，卫星至接收机的几何距离与所有和频率无关的偏差改正项之和为，则有



设信号传播路径为*s*，则有，根据上式可得利用测距码进行伪距测量时的电离层延迟和利用载波相位测量确定卫地距时的电离层延迟分别为



式中：、分别为伪距和载波相位观测值。（用电离层延迟还是电离层延迟改正？）

两类电离层延迟改正之间的关系：在仅顾及项的情况下，测码伪距观测值与载波相位观测值的电离层延迟改正大小相同，符号相反。

1. 未顾及信号内部时延的电离层延迟双频改正模型

令，电离层延迟取，L1、L2两种不同频率的GPS信号沿同一路径传播（实际上两种不同频率的信号通过电离层时的传播路径弯曲程度是不同的，因此传播路径也是不严格相同的，但这种差异十分微小，不予考虑），具有相同的*A*值，于是有



两式求差得



从而根据双频伪距观测值可反推得到电离层延迟量



### 无电离层线性组合



削弱措施

双频观测

利用电离层改正模型加以修正

## 接收机间同步观测值求差：适用于短基线（如<20km），当测站相距不太远时，信号传播路径大致相似，电离层延迟也大致相同。其精度随基线长度增加而明显降低。

## 对流层延迟

### 基本原理

卫星导航定位中的对流层延迟通常泛指卫星信号在高度为50km以下的未被电离的中性大气时所产生的信号延迟。在研究信号延迟过程中不再将该大气层分为对流层和平流层，也不再顾及两者性质上的差别。由于80%的延迟发生在对流层，所以将发生在该中性大气层中的延迟统称为对流层延迟。

对流层延迟与地面气候、大气压力、温度、湿度变化有关，其影响亦与卫星高度角有关，天顶方向的对流层延迟误差达2.3m，地面方向（高度角为10°）影响可达20m。

设电磁波在真空中的传播速度为*c*，对流层中某处的大气折射系数为*n*，卫星信号的传播时间为，传播路径为*s*，则卫星至接收机的几何距离



由于为微小量，故忽略高次项，可得



式中为经过其他各项偏差改正后的伪距或载波相位观测值。

对流层延迟



大气折射指数

### 普通GNSS测量中常用的对流层延迟模型

1. 霍普菲尔德（Hopfield）模型
2. 萨斯塔莫宁（Saastamoinen）模型
3. 勃兰克（Black）模型

### 高精度GNSS测量中的对流层延迟改正

## 天线相位中心偏差

## 多路径误差

在GPS测量中，测站周围反射物所反射的卫星信号（反射波）进入接收机天线，和直接来自卫星的信号（直接波）产生干涉，从而使观测值偏离真实值，这种由于多个路径的信号传播所引起的干涉时延效应称为多路径效应。

多路径误差的大小与反射物离测站的距离、卫星信号的传播方向以及反射物的反射系数等因素有关，难以模型化求出观测瞬间的多路径误差值。

推导多路径误差的表达式

对载波相位而言，多路径误差不超过波长的1/4，L1载波的多路径误差最大值为4.8cm， L2载波则为6.1cm；而多路径误差对伪距测量的影响要严重得多，最大值为近似码长的一半，P码的多路径误差最大可达15m（引用博士论文GNSS）。

* 削弱措施

1. 选择合适的站址

远离大面积平静的水面，远离高大建筑物，不宜选在山坡、山谷和盆地中，汽车不要停放得离测站过近。

1. 选择合适的GPS接收机
2. 适当延长观测时间

## 数据预处理时设置截止高度角（低高度角更易产生多路径效应）

# 精密单点定位的参数估计方法

## 离散系统的扩展卡尔曼滤波（Extended Kalman Filter，EKF）

### 扩展卡尔曼滤波模型

卡尔曼滤波模型由状态方程和观测方程组成，状态方程是描述状态动态变化规律的模型，给出了相邻时刻的状态转移和变化的规律；而观测方程描述了观测向量与状态向量之间的数学关系。标准卡尔曼滤波要求系统的状态方程和观测方程都是线性的，在GPS定位中，载体的状态方程通常可以采用常速模型或常加速模型来描述，而观测方程则是非线性函数。为此，需要引入扩展卡尔曼滤波算法，其基本原理是将状态方程在前一历元的状态估值处线性化，将观测方程在状态预测值处线性化。

设系统状态方程和观测方程为



式中：、分别为时刻的系统状态向量和观测值向量，、均为的非线性函数，为动态噪声驱动阵，为动态噪声向量，为观测噪声向量。

卡尔曼滤波假定系统观测值之间相互独立，且动态噪声与观测噪声是互不相关的零均值高斯白噪声（白噪声序列的特点表现在任何两个时点的随机变量都不相关），其对应的随机模型可表示为



式中：和分别是动态噪声和观测噪声的协方差矩阵；为克罗内克函数，即。

将状态方程和观测方程分别在和处线性化得



式中：状态转移矩阵，观测方程系数矩阵。

设和分别为状态预测值和状态估值的协方差阵，则扩展卡尔曼滤波的预测和修正过程为：

（1）状态预测及协方差阵预测



（2）滤波增益



（3）状态更新及协方差阵更新



### 卡尔曼滤波的推导

辅助公式



设状态预测值和状态估值为随机变量，为状态向量真值，并假设状态估值为预测值与残差向量的线性组合



其中系数阵为待求量。

状态预测值的真误差



根据(4-3)式得状态估值的真误差



状态估值的协方差阵



状态估值中各元素方差之和



采用最小方差估计（属于无偏估计），故最优估计应满足最小，对的偏导数（谁对谁的导数）



由得



将上式代入(4-11)式并化简得



### 观测模型和观测噪声协方差阵的确定

1. 观测模型的确定

选取状态向量



无电离层伪距和载波相位观测方程的实用形式如下



在测站坐标初值处展开为泰勒级数且仅保留一次项，得到误差方程



式中：，，，，，。

线性化观测方程的矩阵形式为



式中：

，，，，，，，为单位阵。

1. 观测噪声协方差阵的确定



### 状态模型和动态噪声协方差阵的确定

1. 状态模型的确定

设采样间隔为，状态模型采用常速模型



动态噪声向量采用加速度向量（另见动态定位中的卡尔曼滤波P24），状态转移矩阵和动态噪声驱动阵分别为



1. 动态噪声协方差阵的确定

### 滤波参数初值和参数协方差阵初值的确定

根据无偏性的要求，递推初值按以下条件选取（这里为随机变量）



1. 状态向量的确定

可根据标准单点定位（Standard Point Positioning ，SPP）或起始近似坐标给出，令，标准单点定位的误差方程为



式中 。

按高度角定权，根据最小二乘准则得。

由初始时刻的伪距和时刻的伪距先后进行单点定位，分别求得时刻和时刻载体的位置估计和，取时刻的速度估计为



1. 状态向量协方差阵的确定

设的协因数阵为



单点定位常用精度衰减因子DOP(Dilution of Precision)来定量地反映几何图形强度

* 1. 三维点位精度衰减因子：
  2. 时间精度衰减因子：
  3. 几何精度衰减因子：

## 附加模糊度参数的扩展卡尔曼滤波

## 递归最小二乘（Recursive Least Square, RLS）

### 序贯最小二乘

考虑第*k*次测量，设、分别为观测值向量及其协方差阵，为待估参数， 为观测噪声，有如下观测方程



假设第*k*次的最优估值为前一次最优估值与残差向量的线性组合



第(*k*-1)次参数估值的真误差



第*k*次参数估值的真误差



参数估值的协方差阵



状态估值中各元素方差之和



采用最小方差（无偏）估计，故最优估计应满足最小，对的偏导数（谁对谁的导数）



由得



将上式代入(4-30)式并化简得



给定待估参数及其协方差阵的初值：，，则序贯最小二乘的递推过程为



### 带有时变参数的递归最小二乘

## 线性模型的参数估计准则

### 线性模型

### 最小二乘估计

### 最大似然估计

### 最小方差估计

### 贝叶斯估计

# 精密单点定位的

### 傅里叶变换、时间序列分析、随机过程（高斯马尔可夫过程）、白噪声等

### 频谱、频谱密度、功率谱、功率谱密度、

### 递归最小二乘和序贯最小二乘、静态卡尔曼滤波

### 计算机算法、回溯、枚举、分治法、母函数、递归等总结一个笔记？

### 回溯填九宫格、汉诺塔问题

### 组合导航、SLAM

### 离散傅里叶变换（DFT）快速傅里叶变换FFT与高斯滤波

### 各种滤波

### 星历、观测、导航三大文件格式

参考文献：